

Analisi (D-K)

A.A. 2020/2021

CdL Fisica, Sapienza Università di Roma
Diario delle lezioni

Giulio Galise*

28 settembre 2020. Il campo ordinato dei reali $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$: assiomi relativi alle operazioni e all'ordinamento. Conseguenze: alcune usuali regole di operazioni. “ $\sqrt{2}$ ” non è razionale. Proprietà di continuità di \mathbb{R} : assioma di Dedekind.

29 settembre 2020. Maggioranti e minoranti, massimo e minimo di un insieme. Insiemi limitati, intervalli. Estremo superiore ed inferiore di un insieme di numeri reali: teorema di esistenza.

2 ottobre 2020. Proprietà di Archimede, densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} , \mathbb{Q} non soddisfa l'assioma di Dedekind. Caratterizzazione inf e sup. Esempi.

5 ottobre 2020. Teorema di esistenza ed unicità in \mathbb{R} della radice n -esima di un numero positivo (dim. solo nel caso $n = 2$). Valore assoluto (o modulo) di un numero reale: definizione, proprietà. Distanza tra numeri reali. Intorni. Il principio di induzione.

6 ottobre 2020. Generalità sulle funzioni: dominio codominio, immagine, controimmagine, grafico. Grafici di alcune funzioni elementari. Funzioni pari, dispari periodiche. Richiami sulle funzioni trigonometriche. Funzione composta e funzione inversa. Restrizioni. Grafico della funzione inversa.

9 ottobre 2020. Esercitazione 1.

12 ottobre 2020. Le funzioni trigonometriche inverse. Potenza ad esponente reale, funzioni esponenziale e logaritmo.

13 ottobre 2020. Operazioni elementari sui grafici: $y = f(x) + c$, $y = f(x + c)$, $y = cf(x)$, $y = f(cx)$, $y = |f(x)|$, $y = f^\pm(x)$. Successioni numeriche: introduzione ed esempi. Successioni convergenti. Teorema di unicità del limite.

16 ottobre 2020. Successioni limitate e teorema di limitatezza successioni convergenti. Successioni divergenti. Le operazioni con i limiti: somma, differenza, prodotto e quoziente (dim. prodotto successioni convergenti). Le forme indeterminate $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

19 ottobre 2020. Esercitazione 2.

*email: galise@mat.uniroma1.it

20 ottobre 2020. Il teorema dei carabinieri ed il criterio del rapporto. Teorema di regolarità delle successioni monotone. Forme indeterminate 0^0 , ∞^0 , 1^∞ . La successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ed il numero di Nepero “e”. Le successioni $\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ con a_n divergente positivamente o negativamente.

23 ottobre 2020. Successioni estratte, $a_n \rightarrow L \Rightarrow a_{k_n} \rightarrow L$. Criterio di non esistenza del limite, esempi: $a_n = (-1)^n$, $a_n = \sin(n\frac{\pi}{4})$. Teorema di Bolzano-Weierstrass.

27 ottobre 2020. Esercitazione 3.

29 ottobre 2020. Successioni di Cauchy, criterio di Cauchy.

30 ottobre 2020. Esercitazione 4.

2 novembre 2020. Serie numeriche. Serie geometrica e rappresentazione dei numeri decimali periodici. Le serie telescopiche. La serie armonica. Condizione necessaria di convergenza.

3 novembre 2020. Serie a termini non negativi, criteri di confronto, confronto asintotico, radice, rapporto.

5 novembre 2020. Criterio di condensazione di Cauchy, la serie armonica generalizzata. Serie a termini di segno alterno: criterio di Leibniz.

6 novembre 2020. Serie a termini di segno variabile: convergenza assoluta. Esercitazione 5

9 novembre 2020. Punti di accumulazioni in $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e insieme derivato. Definizione generale di limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, $x_0, L \in \overline{\mathbb{R}}$. Studio del caso x_0, L finiti ed infiniti, esempi ed interpretazione geometrica.

10 novembre 2020. Esempi ed interpretazione geometrica di $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ nei casi x_0 ed L non entrambi finiti. Teorema ponte, non esistenza del limite mediante il teorema ponte. Unicità del limite, operazioni (somma, prodotto, quoziente) e forme indeterminate, teorema dei carabinieri. Limiti notevoli $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

12 novembre 2020. Limiti di funzioni composte. Limiti notevoli: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$. Limiti di restrizioni: limiti destro e sinistro.

13 novembre 2020. Limiti di funzioni monotone. “Continuità” della funzione esponenziale. Limiti notevoli $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$. Definizione di funzione continua.

16 novembre 2020. Esercitazione 6.

17 novembre 2020. Ulteriori esercizi sul calcolo dei limiti. Prime proprietà delle funzioni continue (algebra delle continue), lo spazio C^0 delle funzioni continue, continuità rispetto alle operazioni di composizione e di inversione tra funzioni. Classificazione dei punti di discontinuità.

19 novembre 2020. Teoremi funzioni continue: permanenza del segno, degli zeri, dei valori intermedi.

20 novembre 2020. Conseguenza del teorema dei valori intermedi: l'immagine continua di un intervallo è un intervallo. Il teorema di Weierstrass. Esercizi.

23 novembre 2020. Esercitazione 7.

24 novembre 2020. Introduzione al calcolo differenziale: definizione di derivata, interpretazione geometrica (problema delle tangenti) e cinematica (velocità istantanea), calcolo di derivate mediante la definizione: x^n ($n \in \mathbb{N}$), x^α ($x > 0$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$), $\sin x$, $\cos x$, $\log_a x$, a^x . Esempi di funzioni non derivabili nell'origine: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (presenza di tangente verticale), $f(x) = |x|$ (non esistenza di tangente). Continuità delle funzioni derivabili.

26 novembre 2020. Algebra delle derivate e derivazione delle funzioni composte. Esempi vari.

27 novembre 2020. Derivazione delle funzioni inverse (*senza dim.*), esempi vari. Teorema di Fermat (condizione necessaria affinché una funzione derivabile ammetta un estremo locale in un punto interno al dominio) e applicazioni.

30 novembre 2020. Teoremi di Rolle e di Lagrange. Conseguenze del teorema di Lagrange: caratterizzazione funzioni costanti in un intervallo, test di monotonia e test di riconoscimento punti stazionari.

1 dicembre 2020. Il teorema di de L'Hôpital (*senza dim.*) con esempi. Funzioni convesse: definizione, interpretazione geometrica, esempi. Caratterizzazioni funzioni convesse derivabili (f convessa $\Leftrightarrow f'$ crescente $\Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$) e 2 volte derivabili (f convessa $\Leftrightarrow f'' \geq 0$).

3 dicembre 2020. Asintoti orizzontali, verticali e obliqui. Studio qualitativo del grafico di funzione.

4 dicembre 2020. Approssimazione di funzioni mediante polinomi: la formula di Taylor con il resto di Peano (*o* piccolo), polinomi di Taylor di e^x , $\sin x$, $\cos x$. Primi esempi di calcolo di limiti mediante la formula di Taylor.

7 dicembre 2020. Polinomi di Taylor di $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, $\log(1+x)$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{1}{1+x^2}$, $\tan x$. Calcolo di limiti.

10 dicembre 2020. Formula di Taylor con resto di Lagrange (*senza dim.*) Applicazioni: calcolo numerico della prima cifra decimale di e , irrazionalità di e , $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Introduzione all'integrale di Riemann per funzioni limitate su intervalli chiusi e limitati $[a, b]$: partizioni di $[a, b]$, somme integrali superiori ed inferiori. Proprietà di monotonia delle somme integrali rispetto alla relazione di inclusione tra suddivisioni.

11 dicembre 2020. Definizione di integrabilità, classe $\mathcal{R}([a, b])$ delle funzioni Riemann-integrabili nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Calcolo (mediante la definizione) di $\int_a^b k dx = k(b - a)$, esempio di funzione non integrabile (la funzione caratteristica dei razionali). Significato geometrico dell'integrale (area del sottografico). Criterio di integrabilità. Integrabilità delle funzioni monotone.

15 dicembre 2020. Integrabilità delle funzioni continue (dim. nel caso Lipschitz). Proprietà di linearità, di monotonia e additività rispetto al dominio di integrazione (*senza dim.*). Teorema della media integrale. Lipschitzianità funzione integrale. Teorema fondamentale del calcolo integrale.

17 dicembre 2020. Primitive ed integrale indefinito. Formula fondamentale del calcolo integrale. Integrali immediati. Formula di integrazione per parti.

18 dicembre 2020. Integrazione per sostituzione. Integrazione delle funzioni razionali.

22 dicembre 2020. Integrali impropri. Criteri di convergenza: confronto, assoluta integrabilità (senza dim.). Esempi vari, in particolare: $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$, $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$, $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$, $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$, $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$.

7 gennaio 2021. Introduzioni alle equazioni differenziali ordinarie: definizioni, integrale generale, ordine dell'equazione, problema di Cauchy, esempi. Equazioni differenziali lineari del primo ordine $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ e a variabili separabili $y'(t) = f(y(t))g(t)$. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti ed omogenee: $y'' + ay' + by = 0$. Soluzioni linearmente indipendenti e teorema di struttura (*senza dim.*) dell' integrale generale. Costruzione di due integrali linearmente indipendenti.

8 gennaio 2021. Equazioni differenziali e modelli: oscillatore armonico con e senza presenza di attrito, moti periodici e periodici smorzati.

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenee: $y'' + ay' + by = f(t)$. Teorema di struttura (*senza dim.*) dell' integrale generale. Forzanti di tipo $f(t) = e^{\alpha t}(p(t) \cos(\beta t) + q(t) \sin(\beta t))$ e metodo di somiglianza.

12 gennaio 2021. Esercitazione 11.

Riferimenti bibliografici

- [1] E. Giusti, *Analisi Matematica 1*, Bollati Boringhieri (2^a e 3^a edizione)
- [2] C.D. Pagani, S. Salsa, *Analisi Matematica 1*, Zanichelli.
- [3] C. Mascia, L. Lamberti, *Note di base di Analisi Matematica*, dispense.